随机非线性系统的最小阶状态观测器及输出反馈镇定控制设计*

刘允刚[1,2] 张纪峰[1**]

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100080; 2. 山东大学控制科学与工程学院，济南 250061)

摘要 对一类具有不可观测状态、未建模动态特性和随机干扰的单输入多输出随机非线性系统，给出了最小阶状态观测器和输出反馈镇定控制器的设计方法. 基于所设计的最小阶状态观测器，给出了系统全部状态的估计，分析了状态估计误差的收敛性. 进一步，结合 Back-Stepping 法，构造性地设计出了输出反馈镇定控制，给出了闭环系统全局渐近稳定和概率意义下有界稳定的充分条件.

关键词 非线性系统 随机系统 最小阶观测器 积分反推法 镇定控制

随机非线性系统全局稳定控制设计最近得到了集中研究[1~8], 它们都是基于交叉设计的递归应用，如众所周知的积分反推方法. Khas'minskii 在他的经典著作[9] 中给出了随机控制系统的基本稳定性理论，引入了两个重要的稳定性概念：概率意义下有界稳定 (bounded in probability) 和全局渐近稳定 (asymptotically stable in the large), 现在已经得到了广泛应用. 我们知道随机控制设计的关键是处理二次导数项. 现有方法是通过增加控制律中变量幂次[1~3] 或者增大反馈能力[5~7] 实现对二次导数项的控制. 如，文献 [1~3] 采用四次 Lyapunov 函数的方法，增加控制律中变量的幂次，给出了全局稳定控制律，但需要假设 (A): 系统非线性和随机干扰向量场在原点消逝. 再如，文献 [5~7] 采用加权二次 Lyapunov 函数，通过调节权函数，改变系统反馈能力，研究了风险灵敏指标下的最优控制设计问题，指出虽然上述假设 (A) 不是闭环系统概率意义下有界稳定的必要条件，但要实现全局渐近稳定控制，该假设似乎不可避免.

文献 [3,7] 给出的控制律基于全状态反馈，而文献 [1,5,6,8] 给出的控制律基

2003-05-28 收稿， 2003-11-24 收修改稿

* 国家自然科学基金 (批准号: 60274021, 60304002) 和科技部重大基础研究前期研究专项资助项目

** 联系人， E-mail: jif@mail.iss.ac.cn

于输出反馈和全阶状态观测器. 利用 [1,5,6,8] 给出的全阶状态观测器，在不存在未建模动态和随机干扰的情况下，可以得到渐近收敛到零的状态观测误差，且收敛性与收敛速度只依赖于误差初值，而不依赖于输出和状态过程. 最近，文献 [10] 给出了一特殊结构的降阶 (reduced-order) 观测器，与文献 [1,5,6,8] 不同的是，所得状态观测误差的动态方程具有依赖于系统输出 $y = x_1$ 的非线性项，而且即使在不存在未建模动态和随机干扰时，该项一般来说也不为零. 这将影响状态观测误差的渐近收敛性，特别是当系统非线性和随机干扰在原点处非零时. 此外，文献 [10] 设计的降阶观测器及设计思想不适用于多输出情况 (比如，$y = (x_1, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}, r > 1$).

本文旨在研究一类单输入多输出 (SIMO) 随机非线性系统的输出反馈控制器的设计问题. 通过引入一个最小阶观测器, 构造性地给出了输出反馈镇定控制律的设计, 使得当系统的非线性及随机干扰向量场在平衡点处为零时闭环系统为全局渐近稳定, 当系统的随机干扰向量场在平衡点处不为零时闭环系统为概率意义下有界稳定. 所引进的最小阶观测器既保留了全阶观测器具有的优点 [1,5,6,8], 又避开了上面提到的出现在观测误差动态方程中的额外非线性项 [10], 而且适用于 SIMO 系统 (如 $y = (x_1, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}, r > 1$) 的控制设计问题.

1　记号与预备知识

本文将用到以下的记号. 对给定的向量或矩阵 X, X^{T} 表示其转置; $\|X\|$ 表示向量 X 的 Euclid 范数或由向量导出的矩阵范数; 当 X 为方阵时, $\mathrm{tr}(X)$ 表示 X 的迹，即 X 的对角元素之和. I 表示单位矩阵 (维数将根据上下文而定). 对给定的向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_{[i]}$ 表示 $(x_1, \cdots, x_i)^{\mathrm{T}}$; $x_{[i,j]}$ 表示 $(x_i, \cdots, x_j)^{\mathrm{T}}$; $\hat{x}$ 表示其相应的观测器的状态, $\tilde{x}$ 表示观测误差，即 $\tilde{x} = x - \hat{x}$. 对给定的标量 x, $|x|$ 表示其绝对值.

为简便起见，在不至于引起混乱的情况下，我们将省略函数的自变量.

定义 1[4]　对任一 $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 函数 $\delta(\cdot)$, 如果它连续、严格递增, 且满足 $\delta(0) = 0$ 和 $\lim\limits_{\mu\to\infty} \delta(\mu) = \infty$, 则称其为 $\mathcal{K}_\infty$ 函数.

对如下随机非线性时变系统

$$\mathrm{d}x = f(t, x)\mathrm{d}t + g(t, x)u\mathrm{d}t + h(t, x)\mathrm{d}w,$$

其中 w 为适当维数的标准 Brown 运动，定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 之上，其中 Ω 为样本空间, $\mathcal{F}$ 为 σ- 代数簇, P 为概率测度，定义微分算子 $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(t,x) = &\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} g(t,x)u \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} h(t,x) h^{\mathrm{T}}(t,x)\right\},\end{aligned}$$

其中 $V(t, x)$ 为任一关于时间 t 一次连续可导、关于 x 二次连续可导函数.

下面我们就如下无控制作用的随机非线性时变系统

$$\mathrm{d}x = f(t,\,x)\mathrm{d}t + h(t,\,x)\mathrm{d}w \tag{1}$$

引入两个稳定性概念：

定义 2[9] 考虑系统 (1), 其中 $f(t,\,0)=0$ 和 $h(t,\,0)=0$. 设 $\{x(t),\,t\geqslant 0\}$ 是系统 (1) 的初始状态为 $x(0)$ 的解过程. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 都有

$$\lim_{x(0)\to 0} P\left\{\sup_{t\geqslant 0}\|x(t)\|\geqslant\varepsilon\right\}=0,$$

并且对任意初始状态 $x(0)$,

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}x(t)=0\right\}=1,$$

则称解 $x(t)=0$ 或系统 (1) 为全局渐近稳定的.

定义 3[9] 对系统 (1), 如果它的所有解过程 $\{x(t),\,t\geqslant 0\}$ 都满足

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{0\leqslant t<\infty}P\left\{\|x(t)\|>c\right\}=0,$$

则称之为概率意义下有界.

对应于上述两个稳定性概念，有如下基本定理，它将在后面的控制设计中起关键作用.

定理 1 考虑随机非线性系统 (1). 如果存在时变函数 $V(t,\,x)$, 其关于时间 t 一次连续可导，关于 x 二次连续可导，且满足

$$W_1(x)\leqslant V(t,\,x)\leqslant W_2(x),\quad \mathcal{L}V(t,\,x)\leqslant -c_1V(t,\,x)+c_2,$$

其中 $W_1(x)$ 和 $W_2(x)$ 为正定的径向无界函数， $c_1>0$ 和 $c_2\geqslant 0$ 为常数，则 a) 系统 (1) 几乎处处 (almost surely) 有惟一解； b) 系统 (1) 概率意义下有界； c) 进一步，如果有 $f(t,\,0)=0$ 和 $h(t,\,0)=0$, $\forall t$, 并存在一连续正定的径向无界函数 $W(x)$ 使得

$$\mathcal{L}V(t,\,x)\leqslant -W(x),$$

那么系统 (1) 为全局渐近稳定.

证 由文献 [9] 的第三章定理 4.1 和第五章定理 4.4, 以及文献 [11] 的第三章定理 2 和第 13 节，并参照文献 [7] 中定理 2.5 的证明过程，我们可以容易地证明本定理.

2 问题描述

2.1 系统模型

考虑如下随机非线性系统:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\chi &= \sigma_0(t,\chi,x)\mathrm{d}t+\sigma_1(t,\chi,x)\mathrm{d}w,\\
\mathrm{d}x_1 &= x_2\mathrm{d}t+f_1(x_{[1]})\mathrm{d}t+\psi_1(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\varphi_1(x_1)\mathrm{d}w,\\
&\ \ \vdots\\
\mathrm{d}x_r &= x_{r+1}\mathrm{d}t+f_r(x_{[r]})\mathrm{d}t+\psi_r(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\varphi_r(x_1)\mathrm{d}w,\\
\mathrm{d}x_{r+1} &= x_{r+2}\mathrm{d}t+f_{r+1}(y)\mathrm{d}t+\psi_{r+1}(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\varphi_{r+1}(x_1)\mathrm{d}w,\\
&\ \ \vdots\\
\mathrm{d}x_n &= u\mathrm{d}t+f_n(y)\mathrm{d}t+\psi_n(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\varphi_n(x_1)\mathrm{d}w,\\
y &= x_{[r]},
\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}$ 和 $y\in\mathbb{R}^r$ 分别为系统的状态、控制输入和可量测输出; $\chi\in\mathbb{R}^{n_0}$ 是系统的不可观测状态, 其动态模型未知 (即函数 $\sigma_0(t,\chi,x)$ 和 $\sigma_1(t,\chi,x)$ 均未知) ; $w\in\mathbb{R}^m$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ 之上的标准 Brown 运动, 其中 Ω 为样本空间, $\mathcal{F}$ 为 σ- 代数簇, $\mathcal{P}$ 为概率测度; $f_i(x_{[i]})$ $(i=1,\cdots,r)$ 和 $f_i(y)$ $(i=r+1,\cdots,n)$ 为系统的已建模 (已知) 动态特性; $\psi_i(t,\chi,\,x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 为系统的未建模 (未知) 动态特性; $\varphi_i(x_1)$ $(i=1,\cdots,n)$ 为描述随机干扰向量场强度的函数.

本文的结论主要建立在如下假设条件上:

A1) 对于不可观测状态 χ, 存在时变函数 $V_0(t,\chi)$, 它关于时间 t 一次连续可导, 关于 χ 二次连续可导, 且存在正定的径向无界函数 $W_{01}(\chi)$ 和 $W_{02}(\chi), \mathcal{K}_\infty$ 函数 $\delta(\cdot)$, 光滑函数 $\delta_0(\cdot):\delta_0(0)=0$ 及常数 $c>0,\ \gamma_0>0$, 使得

$$W_{01}(\chi)\leqslant V_0(t,\,\chi)\leqslant W_{02}(\chi), \mathcal{L}V_0(t,\chi)\leqslant -cV_0(t,\,\chi)-\gamma_0\delta\left(\|\chi\|\right)+x_1\delta_0(x_1).$$

A2) 非线性函数 $f_i(\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$ 和 $\varphi_i(\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$ 已知且光滑, 并满足 $f_i(0)=0$ $(i=1,\cdots,n)$.

A3) 存在 $\mathcal{K}_\infty$ 函数 $\pi(\cdot)$, 非负光滑函数 $\delta_i(\cdot)$: $\delta_i(0)=0$ $(i=1,\cdots,n)$ 和常数 $\gamma_i\geqslant 0$ $(i=1,\cdots,n)$, 使未建模动态部分 $\psi_i(t,\,\chi,\,x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 满足 $|\psi_i|^2\leqslant\gamma_i\pi\left(\|\chi\|\right)+x_1^2\delta_i(x_1)$ $(i=1,\cdots,n)$.

A4) 存在常数 $\gamma>0$, 使得 $\delta(\mu)\geqslant\gamma\pi(\mu),\quad\forall\mu\in[0,\,\infty)$.

注 1　系统 (2) 的状态分为两部分: 一部分是动态模型未知且不可观测的状态 χ, 另一部分是可直接量测或可观测的状态 x. 这两部分状态可以是相互依赖、相互影响的. 不可观测状态 χ 的稳定性受 x 的动态特性的影响, 同时, x 的稳定性也受 χ 的动态特性的影响. 假设 A1) 描述了不可观测状态 χ 的动态特性, 要求它不仅在状态 x 为零时是指数稳定的, 而且对系统的未建模动态具有一定的稳定裕度. 其中的项 $x_1\delta_0(x_1)$ 限定了状态 x 对不可观测状态 χ 的稳定性的影响程度. 对于满足这一限定的不可观测状态 χ, 我们可通过设计适当的控制器消除

x 对它的稳定性的影响，从而实现对不可观测状态 χ 的镇定控制．类似地，为能构造性设计出一个输出反馈镇定控制器，通过假设 A3) 对系统的其他未建模部分也做了限定．假设 A1)~A3) 说明，当不存在随机干扰时，开环系统的平衡点为原点．假设 A4) 刻画了不可观测动态部分的稳定裕度与未建模动态部分之间的关系．它保证了在控制器设计时，系统的未建模动态对不可观测状态的稳定性的影响可借助于不可观测状态的稳定裕度予以消除．

系统 (2) 可改写成如下紧凑形式：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\chi = \sigma_0(t,\chi,x)\mathrm{d}t + \sigma_1(t,\chi,x)\mathrm{d}w, \\ \mathrm{d}y = \left[A_r y + B_r x_{r+1} + F_{[r]}(y) + \Psi_{[r]}(t,\,\chi,\,x)\right]\mathrm{d}t + H_{[r]}(x_1)\mathrm{d}w, \\ \mathrm{d}x_{[r+1,n]} = \left[A_{n-r}x_{[r+1,n]} + B_{n-r}u + F_{[r+1,n]}(y) + \Psi_{[r+1,n]}(t,\,\chi,\,x)\right]\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad +H_{[r+1,n]}(x_1)\mathrm{d}w, \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & & I \\ \vdots & & \\ 0 & & 0\cdots 0 \end{bmatrix}_{(r\times r)}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(r\times 1)},$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}.$$

2.2 控制目标

本文的目标是设计最小阶观测器及输出反馈控制器

$$\dot{\hat{x}} = \vartheta(\hat{x},\,y), \quad u = \mu(\hat{x},\,y), \tag{4}$$

使得闭环系统 (2)~(4) 的零解为概率意义下有界，特别地，当 $\varphi_i(0) = 0\,(i = 1,\cdots,n)$ 时，闭环系统的零解为全局渐近稳定．

3 输出反馈控制设计

在本节，我们首先设计一最小阶状态观测器，并基于此观测器给出系统全部状态的估计，然后再构造性地给出镇定控制器的设计过程．

由于系统 (2) 的状态过程 x 的前 r 个分量 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 已经可以通过系统的输出直接得到，所以只需为后 $n-r$ 个分量 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 设计观测器．由线性系统理论，当系统 (2) 退化为线性系统且无其他未知干扰时，其状态观测器的最小阶为“$n-r$” [12].

3.1 观测器设计

记 $q(t)=\mathrm{d}y-A_r y\mathrm{d}t-F_{[r]}(y)\mathrm{d}t$, 或由 (3) 式，等价地， $q(t)=B_r x_{r+1}\mathrm{d}t+\Psi_{[r]}(t,\chi,x)\mathrm{d}t+H_{[r]}(x_1)\mathrm{d}w$. 如果 $q(t)$ 可用于反馈设计，则可设计出最小阶观测器：

$$\mathrm{d}\hat{x}_{[r+1,n]}=D\hat{x}_{[r+1,n]}\mathrm{d}t+B_{n-r}u\mathrm{d}t+F_{[r+1,n]}(y)\mathrm{d}t+Gq(t), \tag{5}$$

其中 $D=A_{n-r}-GB_rC_{n-r}^{\mathrm{T}}$, $C_{n-r}=(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n-r}$, $G=[g_{ij}]\in\mathbb{R}^{(n-r)\times r}$ 为一待定参数矩阵. 但是，由于不可测状态 x_{r+1} , 未知函数 $\Psi_{[r]}(t,\chi,x)$ 以及随机干扰 w 的存在，方程 (5) 不能用于反馈设计，为了克服这一困难，我们定义一新的向量：

$$\xi=\hat{x}_{[r+1,n]}-Gy. \tag{6}$$

由此及 (5) 式可得

$$\dot{\xi}=D\xi+B_{n-r}u+F_{[r+1,n]}(y)-GF_{[r]}(y)+(DG-GA_r)y. \tag{7}$$

显然， ξ 可构造，从而可用于反馈控制设计.

由 (6) 和 (7) 式，我们得到不可测状态向量 $x_{[r+1,\,n]}$ 的一个重构： $\hat{x}_{[r+1,n]}=\xi+Gy$, 其观测误差为

$$\tilde{x}_{[r+1,n]}=x_{[r+1,n]}-\hat{x}_{[r+1,n]}=x_{[r+1,n]}-\xi-Gy. \tag{8}$$

$\tilde{x}_{[r+1,n]}$ 满足如下动态方程：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{x}_{[r+1,n]}=&\big[A_{n-r}x_{[r+1,n]}+B_{n-r}u+F_{[r+1,n]}(y)+\Psi_{[r+1,n]}(t,\chi,x)\big]\,\mathrm{d}t\\&+H_{[r+1,n]}(x_1)\mathrm{d}w-[D\xi+B_{n-r}u+F_{[r+1,n]}(y)\\&-GF_{[r]}(y)+(DG-GA_r)y]\mathrm{d}t\\&-G[A_r y\mathrm{d}t+B_rC_{n-r}^{\mathrm{T}}x_{[r+1,n]}\mathrm{d}t+F_{[r]}(y)\mathrm{d}t\\&+\Psi_{[r]}(t,\chi,x)\mathrm{d}t+H_{[r]}(x_1)\mathrm{d}w]\\=&D\tilde{x}_{[r+1,n]}\mathrm{d}t+\overline{\Psi}(t,\chi,x)\mathrm{d}t+\overline{H}(x_1)\mathrm{d}w,\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\overline{\Psi}(t,\chi,x)=\Psi_{[r+1,n]}(t,\chi,x)-G\Psi_{[r]}(t,\chi,x)$, $\overline{H}(x_1)=H_{[r+1,n]}(x_1)-GH_{[r]}(x_1)$.

记矩阵 G 的最后一列为 $(k_{r+1},\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$, 并且多项式 $s^{n-r}+k_{r+1}s^{n-r-1}+\cdots+k_{n-1}s+k_n$ 为 Hurwitz, 则 $(n-r)\times(n-r)$ 矩阵

$$D=\begin{bmatrix}-k_{r+1} & \\ \vdots & I\\ -k_n & 0\ \cdots\ 0\end{bmatrix}$$

为严格稳定的. 因此，存在一正定矩阵 P 满足

$$D^{\mathrm{T}}P+PD=-I. \tag{10}$$

易见, 如果未建模动态部分和随机干扰不存在, 即 $\Psi(t,\chi,x)\equiv 0$ 和 $H(x_1)\equiv 0$, 那么 (9) 式变为

$$\dot{\tilde{x}}_{[r+1,n]}=D\tilde{x}_{[r+1,n]}. \tag{11}$$

进而，由 D 的稳定性知，观测误差 $\tilde{x}_{[r+1,n]}$ 全局渐近稳定. 这意味着不可测状态向量 $(x_{r+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\xi+Gy$ 很好地重构.

此时，带观测器 (7) 的完整系统为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\chi=\sigma_0(t,\chi,x)\mathrm{d}t+\sigma_1(t,\chi,x)\mathrm{d}w,\\
&\mathrm{d}\tilde{x}_{[r+1,n]}=D\tilde{x}_{[r+1,n]}\mathrm{d}t+\overline{\Psi}(t,\chi,x)\mathrm{d}t+\overline{H}(x_1)\mathrm{d}w,\\
&\mathrm{d}y=\left[A_ry+B_r(\tilde{x}_{r+1}+\xi_1)+B_rC_{n-r}^{\mathrm{T}}Gy+F_{[r]}(y)+\Psi_{[r]}(t,\chi,x)\right]\mathrm{d}t\\
&\qquad+H_{[r]}(x_1)\mathrm{d}w,\\
&\mathrm{d}\xi=\left[D\xi+B_{n-r}u+F_{[r+1,n]}(y)-GF_{[r]}(y)+(DG-GA_r)y\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{12}$$

注 2 利用文献 [1,8,10] 的方法，我们也可以得到不同形式的降阶或最小阶状态观测器. 不过，却达不到观测器 (7) 那样好的降阶程度和收敛性.

比如，沿文献 [1,8] 的设计思路，可得到如下观测器：

$$\dot{\hat{x}}_{[r,n]}=A_{n-r+1}\hat{x}_{[r,n]}+K_{[r,n]}(x_r-\hat{x}_r)+B_{n-r+1}u+F_{[r,n]}(y),$$

其中 $\hat{x}_{[r,n]}$ 表示 $x_{[r,n]}$ 的估计，$K_{[r,n]}=(k_r,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$ 为设计参数向量，使得多项式 $s^{n-r+1}+k_rs^{n-r}+\cdots+k_{n-1}s+k_n$ 为 Hurwitz.

令 $\tilde{x}_{[r,n]}=x_{[r,n]}-\hat{x}_{[r,n]}$ 为观测误差，则

$$\mathrm{d}\tilde{x}_{[r,n]}=S_r\tilde{x}_{[r,n]}\mathrm{d}t+\Psi_{[r,n]}(t,\chi,x)\mathrm{d}t+H_{[r,n]}(x_1)\mathrm{d}w,$$

其中

$$S_r=\begin{bmatrix}-k_r & \\ \vdots & I\\ -k_n & 0\ \cdots\ 0\end{bmatrix}$$

为严格稳定矩阵.

易见，此时虽然当未建模动态部分和随机干扰不存在时，观测误差 $\tilde{x}_{[r,n]}$，进而 $\tilde{x}$ 渐近收敛于零，但观测器是 $n-r+1$ 阶的，不是最小阶观测器.

再比如，沿文献 [10] 的设计思路，我们可以得到状态 $x_i\ (i=r+1,\cdots,n)$ 的重构 $\hat{x}_i=\xi_i+k_ix_r\ (i=r+1,\cdots,n)$，其中 $\xi_i\ (i=r+1,\cdots,n)$ 为如下观测器的状态

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_{r+1}=\xi_{r+2}+k_{r+2}x_r-k_{r+1}\left(\xi_{r+1}+k_{r+1}x_r\right),\\
&\dot{\xi}_i=\xi_{i+1}+k_{i+1}x_r-k_i\left(\xi_{r+1}+k_{r+1}x_r\right),\ i=r+2,\cdots,n-1,\\
&\dot{\xi}_n=u-k_n\left(\xi_{r+1}+k_{r+1}x_r\right),
\end{aligned}\tag{13}$$

其中设计参数 $k_i\ (r+1\leqslant i\leqslant n)$ 的选择使得矩阵 S_{r+1} 为严格稳定的.

那么观测误差 $\tilde{x}_{[r+1,n]}=(x_{r+1}-\xi_{r+1}-k_{r+1}x_r,\cdots,x_n-\xi_n-k_nx_r)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\mathrm{d}\tilde{x}_{[r+1,n]}=S_{r+1}\tilde{x}_{[r+1,n]}\mathrm{d}t+\overline{f}(y)\mathrm{d}t+\overline{\psi}(t,\chi,x)\mathrm{d}t+\overline{\varphi}(x_1)\mathrm{d}w,\tag{14}$$

其中

$\overline{f}(y)=(f_{r+1}(y)-k_{r+1}f_r(y),\,\cdots,\,f_n(y)-k_nf_r(y))^{\mathrm{T}},$

$\overline{\psi}(t,\,\chi,\,x)=(\psi_{r+1}(t,\,\chi,\,x)-k_{r+1}\psi_r(t,\,\chi,\,x),\,\cdots,\,\psi_n(t,\,\chi,\,x)-k_n\psi_r(t,\,\chi,\,x))^{\mathrm{T}},$

$\overline{\varphi}(x_1)=(\varphi_{r+1}(x_1)-k_{r+1}\varphi_r(x_1),\,\cdots,\,\varphi_n(x_1)-k_n\varphi_r(x_1))^{\mathrm{T}},$

由此，不难看出，虽然此时的观测器的阶数是 $n-r$ 的，是最小的，但状态估计误差的收敛性却难以分析了．比如，在未建模动态部分和随机干扰不存在时，即 $\Psi(t,\,\chi,\,x)\equiv 0$ 和 $H(x_1)\equiv 0$, 状态估计误差方程 (14) 变为

$$\dot{\tilde{x}}_{[r+1,n]}=S_{r+1}\tilde{x}_{[r+1,n]}+\overline{f}(y).$$

与 (11) 式不同的是，此处多了一非线性项 $\overline{f}(y)$. 由于该项的存在，一般来说估计误差 $\tilde{x}_{[r+1,n]}$ 就不一定趋向于零了．此外，观测器 (13) 只适用于形如 $y=x_1$ 的单输出系统，而不适用于形如 $y=x_{[r]}(r>1)$ 的多输出系统 (关于此点我们将在后面做进一步的分析).

3.2　控制设计

现在我们为系统 (12) 设计控制器 $u(y,\xi)$, 使得闭环系统概率意义下有界，并且当非线性及随机干扰向量场在平衡点处消逝时，闭环系统全局渐近稳定.

首先定义新的状态变换:

$$\begin{cases} z_i=x_i-\alpha_{i-1}(x_{[i-1]}), \quad i=1,2,\cdots,r,\\ z_i=\xi_{i-r}-\alpha_{i-1}(y,\xi_{[i-r-1]}), \quad i=r+1,\cdots n, \end{cases} \tag{15}$$

并约定 $\alpha_0(x_{[0]})\equiv 0, z_{n+1}\equiv 0$. 此处，$\alpha_i\ (i=1,\,\cdots,\,n-1)$ 为待定的光滑函数，称之为虚拟控制；$\alpha_n=u(y,\,\xi)$ 为待定实际控制；并且 $\alpha_i\ (i=1,\,\cdots,\,n)$ 在原点处保持平衡性，即 $\alpha_1(0)=\cdots=\alpha_r(0)=\alpha_{r+1}(0,0)=\cdots=\alpha_n(0,0)=0.$

在新变量 z 下，系统 (12) 变为

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\chi=\sigma_0(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\sigma_1(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}w,\\ &\mathrm{d}\tilde{x}_{[r+1,n]}=D\tilde{x}_{[r+1,n]}\mathrm{d}t+\overline{\Psi}(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\overline{H}(x_1)\mathrm{d}w,\\ &\mathrm{d}z_i=(z_{i+1}+\alpha_i)\mathrm{d}t+\Omega_i(x_{[i]})\mathrm{d}t+\Theta_i(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\Phi_i(x_1,\,x_{[i-1]})\mathrm{d}w,\\ &\qquad i=1,\cdots,r-1,\\ &\mathrm{d}z_r=(z_{r+1}+\alpha_r)\mathrm{d}t+\tilde{x}_{r+1}\mathrm{d}t+\Omega_r(y)\mathrm{d}t+\Theta_r(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t\\ &\qquad +\Phi_r(x_1,\,x_{[r-1]})\mathrm{d}w,\\ &\mathrm{d}z_{r+i}=(z_{r+i+1}+\alpha_{r+i})\mathrm{d}t-\frac{\partial\alpha_{r+i-1}}{\partial x_r}\tilde{x}_{r+1}\mathrm{d}t+\Omega_{r+i}(y,\xi_{[i]})\mathrm{d}t\\ &\qquad\quad +\Theta_{r+i}(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t+\Phi_{r+i}(y,\xi_{[i-1]})\mathrm{d}w,\ i=1,\cdots,n-r-1,\\ &\mathrm{d}z_n=u\mathrm{d}t-\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_r}\tilde{x}_{r+1}\mathrm{d}t+\Omega_n(y,\xi_{[n-r]})\mathrm{d}t+\Theta_n(t,\,\chi,\,x)\mathrm{d}t\\ &\qquad +\Phi_n(y,\,\xi_{[n-r-1]})\mathrm{d}w, \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Phi_i &= \varphi_i(x_1) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \varphi_j(x_1), \quad i = 1, \cdots, r; \\
\Phi_{r+i} &= -\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \alpha_{r+i-1}}{\partial x_j} \varphi_j(x_1), \quad i = 1, \cdots, n-r, \\
\Omega_i &= f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j}[x_{j+1} + f_j] - \frac{1}{2} \sum_{j,\, k \in \{1, \cdots, i-1\}} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_j \partial x_k} \varphi_j \varphi_k^{\mathrm{T}}, \\
&\quad i = 1, 2, \cdots, r-1, \\
\Omega_r &= f_r + \sum_{j=1}^{r} g_{1j} x_j - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\partial \alpha_{r-1}}{\partial x_j}[x_{j+1} + f_j] - \frac{1}{2} \sum_{j,\, k \in \{1, \cdots, r-1\}} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_j \partial x_k} \varphi_j \varphi_k^{\mathrm{T}}, \\
\Omega_{r+i} &= f_{r+i}(y) - k_{r+i}\xi_1 - \sum_{j=1}^{r} g_{ij} f_j + [DG - GA_r]_i y - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\partial \alpha_{r+i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \alpha_{r+i-1}}{\partial x_j} f_j(x_{[j]}) - \frac{\partial \alpha_{r+i-1}}{\partial x_r}\left(\xi_1 + \sum_{i=1}^{r} g_{1i} x_i\right) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{r+i-1}}{\partial \xi_j} \\
&\quad \times \left(-k_{r+j}\xi_1 + \xi_{j+1} + f_{r+j} + [DG - GA_r]_j y + \sum_{k=1}^{r} g_{jk} f_k\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j,\, k \in \{1, \cdots, r\}} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_j \partial x_k} \varphi_j \varphi_k^{\mathrm{T}},\ i = 1, \cdots, n-r, \\
\Theta_i &= \psi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \psi_j, \quad i = 1, \cdots, r; \\
\Theta_{r+i} &= -\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \psi_j, \quad i = 1, \cdots, n-r.
\end{aligned}
$$

此处， $[DG - GA_r]_i$ 表示由矩阵 $DG - GA_r$ 的第 i 行构成的 r 维行向量.

选择 Lyapunov 函数 $V(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$
V = \tilde{x}_{[r+1,n]}^{\mathrm{T}} P \tilde{x}_{[r+1,n]} + \sum_{i=1}^{n} \Xi_i(z_{[i-1]}) z_i^2,
$$

其中 $P > 0$ 为 (10) 式的惟一正定解， $\Xi_i(z_{[i-1]}) > 0 (i = 1, \cdots, n)$ 为待定的光滑加权函数.

运用伊藤公式 (Itô formula), 由 (10) 和 (16) 式我们有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V &= -\|\tilde{x}_{[r+1,n]}\|^2 + 2\tilde{x}_{[r+1,\, n]}^{\mathrm{T}} P \overline{\Psi} + \mathrm{tr}\{\overline{H}^{\mathrm{T}} P \overline{H}\} + \sum_{i=r}^{n} M_i \tilde{x}_{r+1} z_i \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{n} \Xi_i(z_{i+1} + \alpha_i + \Omega_i + \Theta_i) z_i + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \Xi_i}{\partial z_j}(z_{j+1} + \alpha_j + \Omega_j + \Theta_j) z_i^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\left\{\frac{\partial^2(\Xi_i z_i^2)}{\partial z_{[i]}^2}[\Phi_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \Phi_i^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}[\Phi_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \Phi_i^{\mathrm{T}}]\right\},
\end{aligned} \tag{17}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
M_r &= 2\Xi_r, \qquad M_{r+1} = \frac{\partial \Xi_{r+1}}{\partial z_r} z_{r+1} - 2\Xi_{r+1}\frac{\partial \alpha_r}{\partial x_r}, \\
M_i &= \frac{\partial \Xi_i}{\partial z_r} z_i - \sum_{j=r+1}^{i-1} \frac{\partial \Xi_i}{\partial z_j}\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_r} z_i - 2\Xi_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_r}, \quad i = r+2, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

由假设 A3)~A4), 等式 (17) 右边第二项满足:

$$
\begin{aligned}
2\tilde{x}_{[r+1,\,n]}^{\mathrm{T}} P\overline{\Psi} &\leqslant \varepsilon_1 \|\tilde{x}_{[r+1,\,n]}\|^2 + \frac{\|P\|^2}{\varepsilon_1}\|\overline{\Psi}\|^2 \\
&\leqslant \varepsilon_1 \|\tilde{x}_{[r+1,\,n]}\|^2 + \frac{\|P\|^2}{\varepsilon_1}\left(\|G\|^2+1\right)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma_i}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right) + x_1^2\delta_i(x_1)\right],
\end{aligned} \tag{18}
$$

此处及下文中的 $\varepsilon_1, \varepsilon_0, \varepsilon_2$ 和 $\kappa_i, \varepsilon_{2i}, \beta_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 为待定的大于零的设计参数.

对等式 (17) 右边的第四项，有等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=r}^{n} M_i \tilde{x}_{r+1} z_i &= \frac{\varepsilon_2}{2}|\tilde{x}_{r+1}|^2 - \frac{\varepsilon_2}{2}\left|\tilde{x}_{r+1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{i=r}^{n} M_i z_i\right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{i=r}^{n}\sum_{j=r}^{i-1} M_i z_i M_j z_j + \frac{1}{2\varepsilon_2}\sum_{i=r}^{n} M_i^2 z_i^2.
\end{aligned} \tag{19}
$$

另外，由假设 A3)~A4) 可推得

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} \Xi_i \Theta_i z_i &= 2\sum_{i=1}^{r} \Xi_i z_i \psi_i - 2\sum_{i=1}^{n} \Xi_i z_i \sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j}\psi_j \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r}\left[\Xi_i^2 z_i^2 + \frac{\gamma_i}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right) + z_1^2\delta_i(z_1)\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\left[\left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j}\right)^2 \Xi_i^2 z_i^2 + \frac{\gamma_j}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right) + z_1^2\delta_j(z_1)\right]
\end{aligned} \tag{20}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial \Xi_i}{\partial z_j}\Theta_j z_i^2 &= \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\frac{\partial \Xi_i}{\partial z_j}\psi_j - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial \Xi_i}{\partial z_j}\sum_{k=1}^{\min\{j-1,\,r\}}\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}\psi_k\right) z_i^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\left[\left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial z_j}\right)^2 z_i^4 + \frac{\gamma_j}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right) + z_1^2\delta_j(z_1)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{\min\{j-1,\,r\}}\left[\left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial z_j}\right)^2\left(\frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial x_k}\right)^2 z_i^4\right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_k}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right) + z_1^2\delta_k(z_1)\right].
\end{aligned} \tag{21}
$$

记 $X=\left(y^{\mathrm{T}},\ \xi^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$. 则由状态变换 (15), 存在光滑函数 $\vartheta_i(\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$, 使得 $z_{[i]}=\vartheta_i(X_{[i]})$ $(i=1,\cdots,n)$. 由 $\varphi_i(\cdot)$, $\alpha_i(\cdot)$ 和 $\vartheta_i(\cdot)$ $(i=1,\cdots,n)$ 的光滑性知 $\overline{H}$, $\varPhi_i$ 可被分解成如下形式:

$$\begin{aligned}
&\overline{H}(x_1)=\overline{H}(z_1)=\overline{H}(0)+\overline{H}_{11}(z_1)z_1,\\
&\varPhi_1(x_1)=\varphi_1(z_1)=\varphi_1(0)+\overline{\varPhi}_{11}(z_1)z_1,\\
&\varPhi_i(X_{[i-1]})=\overline{\varPhi}_i(z_{[i-1]})=\overline{\varPhi}_i(0)+\sum_{j=1}^{i-1}\overline{\varPhi}_{ij}(z_{[j]})z_j,\quad i=2,\cdots,n,
\end{aligned}$$

其中 $\overline{\overline{H}}(z_1)$, $\overline{\varPhi}_{11}(z_1)$ 和 $\overline{\varPhi}_{ij}(z_{[j]})$, $i=2,\cdots,n$, $j=1,\cdots,i-1$ 为光滑函数，并且 $\overline{H}(0)=H_{[r+1,n]}(0)-GH_{[r]}(0)$ 可用于控制设计.

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\{\overline{H}(x_1)P\overline{H}^{\mathrm{T}}(x_1)\}&=\mathrm{tr}\left\{\left[\overline{H}(0)+\overline{H}_{11}(z_1)z_1\right]P\left[\overline{H}(0)+\overline{H}_{11}(z_1)z_1\right]^{\mathrm{T}}\right\}\\
&=\mathrm{tr}\left[\overline{H}(0)P\overline{H}^{\mathrm{T}}(0)\right]+\mathrm{tr}\left\{\left[2\overline{H}(0)+\overline{H}_{11}(z_1)z_1\right]P\overline{H}_{11}^{\mathrm{T}}(z_1)\right\}z_1
\end{aligned}\tag{22}$$

和

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial^2(\varXi_i z_i^2)}{\partial z_{[i]}^2}[\varPhi_1^{\mathrm{T}},\cdots,\ \varPhi_i^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}[\varPhi_1^{\mathrm{T}},\cdots,\ \varPhi_i^{\mathrm{T}}]\right\}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}^2}z_i^2 & 2\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}}z_i\\ 2\left(\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}}\right)^{\mathrm{T}}z_i & 2\varXi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}^2}z_i & 2\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}}\\ 2\left(\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}}\right)^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]z_i\\
&+\varXi_1\left[\varphi_1(0)+\overline{\varPhi}_{11}(z_1)z_1\right]\left[\varphi_1(0)+\overline{\varPhi}_{11}(z_1)z_1\right]^{\mathrm{T}}\\
&+\sum_{i=2}^{n}\varXi_i\left[\overline{\varPhi}_i(0)+\sum_{j=1}^{i-1}\overline{\varPhi}_{ij}(z_{[j]})z_j\right]\left[\overline{\varPhi}_i(0)+\sum_{j=1}^{i-1}\overline{\varPhi}_{ij}(z_{[j]})z_j\right]^{\mathrm{T}}\\
\leqslant&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}^2}z_i & 2\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}}\\ 2\left(\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}}\right)^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]z_i\\
&+\varXi_1\left[\varphi_1(0)+\overline{\varPhi}_{11}(z_1)z_1\right]\left[\varphi_1(0)+\overline{\varPhi}_{11}(z_1)z_1\right]^{\mathrm{T}}\\
&+2\sum_{i=2}^{n}\varXi_i\|\overline{\varPhi}_i(0)\|^2+2\sum_{i=2}^{n}i\varXi_i\sum_{j=1}^{i-1}\varXi_j^{-1}\|\overline{\varPhi}_{ij}(z_{[j]})\|^2\varXi_j z_j^2.
\end{aligned}\tag{23}$$

将 (18)~(23) 式代入 (17) 式，得到如下不等式:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V \leqslant & -\|\tilde{x}_{[r+1,n]}\|^2+\mathrm{tr}\left[\overline{H}(0)P\overline{H}^{\mathrm{T}}(0)\right]+\mathrm{tr}\left\{\left[2\overline{H}(0)+\overline{H}_{11}(z_1)z_1\right]P\overline{H}_{11}^{\mathrm{T}}(z_1)\right\}z_1\\
&+\varepsilon_1\|\tilde{x}_{[r+1,\,n]}\|^2+2\sum_{i=1}^{n}\Xi_i(z_{i+1}+\alpha_i+\Omega_i)z_i\\
&+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\Xi_i}{\partial z_j}(z_{j+1}+\alpha_j+\Omega_j)z_i^2\\
&+\frac{\|P\|^2}{\varepsilon_1}\left(\|G\|^2+1\right)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma_i}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right)+z_1^2\delta_i(z_1)\right]+\frac{1}{2\varepsilon_2}\sum_{i=r}^{n}M_i^2z_i^2\\
&+\frac{\varepsilon_2}{2}|\tilde{x}_{r+1}|^2-\frac{\varepsilon_2}{2}\left|\tilde{x}_{r+1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{i=r}^{n}M_iz_i\right|^2+\frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{i=r}^{n}\sum_{j=r}^{i-1}M_jz_jM_iz_i\\
&+\sum_{i=1}^{r}\left[\Xi_i^2z_i^2+\frac{\gamma_i}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right)+z_1^2\delta_i(z_1)\right]\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\right)^2\Xi_i^2z_i^2+\frac{\gamma_j}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right)+z_1^2\delta_j(z_1)\right]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\left[\left(\frac{\partial\Xi_i}{\partial z_j}\right)^2z_i^4+\frac{\gamma_j}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right)+z_1^2\delta_j(z_1)\right]\right.\\
&\left.+\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{\min\{j-1,\,r\}}\left[\left(\frac{\partial\Xi_i}{\partial z_j}\right)^2\left(\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_k}\right)^2z_i^4+\frac{\gamma_k}{\gamma}\delta\left(\|\chi\|\right)+z_1^2\delta_k(z_1)\right]\right\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\Xi_i}{\partial z_{[i-1]}^2}z_i & 2\dfrac{\partial\Xi_i}{\partial z_{[i-1]}}\\ 2\left(\dfrac{\partial\Xi_i}{\partial z_{[i-1]}}\right)^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots\\ \varPhi_i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]z_i\\
&+\Xi_1\left[2\varphi_1(0)+\overline{\varPhi}_{11}(z_1)z_1\right]\overline{\varPhi}_{11}^{\mathrm{T}}(z_1)z_1\\
&+\Xi_1\varphi_1(0)\varphi_1^{\mathrm{T}}(0)+2\sum_{i=2}^{n}\Xi_i\|\overline{\varPhi}_i(0)\|^2+2\sum_{i=2}^{n}i\Xi_i\sum_{j=1}^{i-1}\Xi_j^{-1}\|\overline{\varPhi}_{ij}(z_{[j]})\|^2\Xi_jz_j^2.
\end{aligned}\tag{24}
$$

选取加权函数 Ξ_1, $\Xi_i(z_{[i-1]})\,(2\leqslant i\leqslant n)$ 分别为

$$
\Xi_1=\kappa_1,\quad \Xi_i=\frac{\kappa_i}{1+\|\overline{\varPhi}_i(0)\|^2+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\Xi_j^{-1}\|\overline{\varPhi}_{ij}(z_{[j]})\|^2},\qquad 2\leqslant i\leqslant n.
$$

由 (24) 式和不等式

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}\Xi_i\overline{\alpha}_i(0)z_i\sqrt{\frac{\Xi_i(0)}{\Xi_i(z_{[i-1]})}} &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\Xi_i}{\varepsilon_{2i}}z_i^2+\Xi_i(0)\varepsilon_{2i}(\overline{\alpha}_i(0))^2\right]\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\Xi_i}{\varepsilon_{2i}}z_i^2+\kappa_i\varepsilon_{2i}(\overline{\alpha}_i(0))^2\right],
\end{aligned}
$$

直接验算可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V \leqslant & -\overline{c}_1\|\tilde{x}_{[r+1,n]}\|^2-\overline{c}_2\delta\left(\|\chi\|\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i\varXi_i z_i^2+\varepsilon_0\left[\gamma_0\delta\left(\|\chi\|\right)-z_1\delta_0(z_1)\right] \\
& +2\sum_{i=1}^{n}\varXi_i\left[\alpha_i-\overline{\alpha}_i(X_{[i]})+\overline{\alpha}_i(0)\sqrt{\frac{\varXi_i(0)}{\varXi_i(z_{[i-1]})|_{z_{[i-1]}=\vartheta_{i-1}(X_{[i-1]})}}}\right]z_i+c_3,
\end{aligned} \tag{25}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\overline{c}_1 &= 1-\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_2}{2}, \\
\overline{c}_2 &= \varepsilon_0\gamma_0-\sum_{i=1}^{r}\frac{\gamma_i}{\gamma}-\frac{\|P\|^2}{\varepsilon_1}\left(\|G\|^2+1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\gamma}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\frac{\gamma_j}{\gamma} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left[\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\frac{\gamma_j}{\gamma}+\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{\min\{j-1,\,r\}}\frac{\gamma_k}{\gamma}\right], \\
\bar{\beta}_i &= \beta_i-2\sum_{j=i+1}^{n}j\kappa_j-\frac{1}{\varepsilon_{2i}},\quad i=1,\cdots,n-1,\quad \bar{\beta}_n=\beta_n-\frac{1}{\varepsilon_{2n}}; \\
\overline{\alpha}_1 &= \Bigg\{\frac{\varepsilon_0}{2\varXi_1}\delta_0(z_1)-\frac{\beta_1 z_1}{2}-\varOmega_1-\frac{1}{2\varXi_1}\mathrm{tr}\left\{\left[2\overline{H}(0)+\overline{H}_{11}(z_1)z_1\right]P\overline{H}_{11}^{\mathrm{T}}(z_1)\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\varXi_1 z_1-\frac{1}{2\varXi_1}\sum_{i=1}^{r}\delta_i(z_1)z_1-\frac{1}{2}\left[2\varphi(0)+\overline{\varPhi}_{11}(z_1)z_1\right]\overline{\varPhi}_{11}^{\mathrm{T}}(z_1) \\
&\quad -\frac{1}{2\varXi_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}z_1\delta_j(z_1) \\
&\quad -\frac{z_1}{4\varXi_1}\sum_{i=2}^{n}\left[\sum_{j=1}^{\min\{i-1,\,r\}}\delta_j(z_1)+\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{\min\{j-1,\,r\}}\delta_k(z_1)\right]\Bigg\}_{z_1=x_1}, \\
\overline{\alpha}_i &= \Bigg\{-\frac{\beta_i z_i}{2}-\frac{\varXi_{i-1}}{2\varXi_i}z_{i-1}-\varOmega_i-\frac{z_i}{2\varXi_i}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\varXi_i}{\partial z_j}(z_{j+1}+\alpha_j+\varOmega_j) \\
&\quad -\frac{z_i}{2}\varXi_i-\frac{z_i}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\right)^2\varXi_i-\frac{1}{4\varXi_i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\partial\varXi_i}{\partial z_j}\right)^2 z_i^3 \\
&\quad -\frac{1}{4\varXi_i}\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}^2}z_i & 2\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}} \\ 2\left(\dfrac{\partial\varXi_i}{\partial z_{[i-1]}}\right)^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots \\ \varPhi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varPhi_1\\ \vdots \\ \varPhi_i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right] \\
&\quad -\frac{1}{4\varXi_i}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{\partial\varXi_i}{\partial z_j}\right)^2\left(\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_k}\right)^2 z_i^3\Bigg\}_{z_{[i]}=\vartheta_i(X_{[i]})},\ i=2,\cdots,r-1, \\
\overline{\alpha}_r &= \Bigg\{-\frac{\beta_r z_r}{2}-\frac{\varXi_{r-1}}{2\varXi_r}z_{r-1}-\varOmega_r-\frac{z_r}{2\varXi_r}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{\partial\varXi_r}{\partial z_j}(z_{j+1}+\alpha_j+\varOmega_j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{z_r}{2}\Xi_r-\frac{z_r}{2}\sum_{j=1}^{r-1}\left(\frac{\partial\alpha_{r-1}}{\partial x_j}\right)^2\Xi_r-\frac{1}{4\Xi_r}\sum_{j=1}^{r-1}\left(\frac{\partial\Xi_r}{\partial z_j}\right)^2 z_r^3\\
&-\frac{1}{4\Xi_r}\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\Xi_r}{\partial z_{[r-1]}^2}z_r & 2\dfrac{\partial\Xi_r}{\partial z_{[r-1]}}\\ 2\left(\dfrac{\partial\Xi_r}{\partial z_{[r-1]}}\right)^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_r\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]\\
&\left.-\frac{1}{4\Xi_r\varepsilon_2}M_r^2z_r-\frac{1}{4\Xi_r}\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{\partial\Xi_r}{\partial z_j}\right)^2\left(\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_k}\right)^2 z_r^3\right\}_{z_{[r]}=\vartheta_r(X_{[r]})},\\
\overline{\alpha}_i=&\left\{-\frac{\beta_i z_i}{2}-\frac{\Xi_{i-1}}{2\Xi_i}z_{i-1}-\Omega_i-\frac{z_i}{2\Xi_i}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\Xi_i}{\partial z_j}(z_{j+1}+\alpha_j+\Omega_j)\right.\\
&-\frac{z_i}{2}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\right)^2\Xi_i-\frac{1}{4\Xi_i\varepsilon_2}M_i^2z_i-\frac{M_i}{2\Xi_i\varepsilon_2}\sum_{j=r}^{i-1}M_jz_j\\
&-\frac{1}{4\Xi_i}\mathrm{tr}\left[\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\Xi_i}{\partial z_{[i-1]}^2}z_i & 2\dfrac{\partial\Xi_i}{\partial z_{[i-1]}}\\ 2\left(\dfrac{\partial\Xi_i}{\partial z_{[i-1]}}\right)^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]\\
&-\frac{1}{4\Xi_i}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial\Xi_i}{\partial z_j}\right)^2 z_i^3\\
&\left.-\frac{1}{4\Xi_i}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\partial\Xi_i}{\partial z_j}\right)^2\sum_{k=1}^{\min\{j-1,r\}}\left(\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_k}\right)^2 z_i^3\right\}_{z_{[i]}=\vartheta_i(X_{[i]})},\\
&i=r+1,\cdots,n;\\
c_3=&\ \mathrm{tr}\left[\overline{H}(0)P\overline{H}^{\mathrm{T}}(0)\right]+\kappa_1\varphi_1(0)\varphi_1^{\mathrm{T}}(0)+\sum_{i=2}^{n}\kappa_i\left(\frac{2\|\overline{\Phi}(0)\|^2}{1+\|\overline{\Phi}(0)\|^2}+\varepsilon_{2i}\overline{\alpha}_i^2(0)\right).
\end{aligned}\tag{26}
$$

设计 $\alpha_i\,(i=1,\cdots,n)$ 为

$$
\alpha_i(X_{[i]})=\overline{\alpha}_i(X_{[i]})-\overline{\alpha}_i(0)\sqrt{\frac{\Xi_i(0)}{\Xi_i(z_{[i-1]})|_{z_{[i-1]}=\vartheta_{i-1}(X_{[i-1]})}}},\tag{27}
$$

那么实际控制律为

$$
u=\alpha_n.\tag{28}
$$

将 (27) 和 (28) 式代入 (25) 式，得到:

$$
\mathcal{L}V\leqslant-\overline{c}_1\|\tilde{x}_{[r+1,n]}\|^2-\overline{c}_2\delta(\|\chi\|)-\sum_{i=1}^{n}\bar{\beta}_i\Xi_iz_i^2+\varepsilon_0\left[\gamma_0\delta(\|\chi\|)-z_1\delta_0(z_1)\right]+c_3.\tag{29}
$$

3.3 设计参数的选取

从上面的设计过程可以看出, 如何选择设计参数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 $\kappa_i, \varepsilon_{2i}, \beta_i$ $(i=1, \cdots, n)$, 使得如下不等式成立是十分关键的:

$$\bar{c}_1 > 0, \quad \bar{c}_2 \geqslant 0, \quad \bar{\beta}_1 > 0, \cdots, \bar{\beta}_n > 0. \tag{30}$$

下述引理讨论了设计参数的选取问题，并在证明过程中给出了参数取值的范围及选取方法.

引理 1 总存在正的设计参数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 $\kappa_i, \varepsilon_{2i}, \beta_i, (i=1, \cdots, n)$, 使得不等式 (30) 成立.

证 任取设计参数 $\kappa_i > 0, \varepsilon_{2i} > 0 (i=1, \cdots, n), \varepsilon_1 \in \left(1, \dfrac{1}{2}\right), \varepsilon_2 \in (0, 1)$, 再取

$$\beta_i > 2\sum_{j=i+1}^{n} j\kappa_j + \frac{1}{\varepsilon_{2i}} \ (i=1, \cdots, n-1); \quad \beta_n > \frac{1}{\varepsilon_{2n}}$$

和

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \geqslant & \sum_{i=1}^{r} \frac{\gamma_i}{\gamma_0 \gamma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\|P\|^2}{\gamma_0 \gamma \varepsilon_1} \left(\|G\|^2 + 1\right) \gamma_i + \frac{1}{\gamma_0 \gamma} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\min\{i-1, r\}} \gamma_j \\ & + \frac{1}{2\gamma_0 \gamma} \sum_{i=2}^{n} \left[\sum_{j=1}^{\min\{i-1, r\}} \gamma_j + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{\min\{j-1, r\}} \gamma_k\right].\end{aligned}$$

易验证不等式 (30) 成立.

3.4 主要结果

下述定理概括了本文的主要结果.

定理 2 对随机非线性系统 (2), 如假设 A1)~A4) 成立，参数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 $\kappa_i, \varepsilon_{2i}, \beta_i (i = 1, \cdots, n)$ 的选择使得不等式 (30) 成立，则基于最小阶观测器 (7) 的输出反馈控制 (28) 使得闭环系统几乎处处在 $[0, \infty)$ 上存在惟一解，并且闭环系统为概率意义下有界．此外，当 $\varphi_i(0) = 0 \, (i = 1, \cdots, n)$ 时，闭环系统为全局渐近稳定.

证 在 3.2 小节中我们已经设计了控制器 (参见 (27) 和 (28) 式). 设整个系统的 Lyapunov 函数为 $V_c = \varepsilon_0 V_0 + V$, 那么由假设 A1) 和 (29) 式，有

$$\mathcal{L}V_c \leqslant -\varepsilon_0 c V_0 - \bar{c}_1 \|\tilde{x}_{[r+1,n]}\|^2 - \bar{c}_2 \delta\left(\|\chi\|\right) - \sum_{i=1}^{n} \bar{\beta}_i \varXi_i z_i^2 + c_3 \leqslant -c_1 V_c + c_3, \tag{31}$$

其中 $c_1 = \min\left(c, \bar{c}_1 \lambda_{\max}^{-1}(P), \ \bar{\beta}_1, \ \cdots, \ \bar{\beta}_n\right)$. 再由假设 A1), 有不等式 $\varepsilon_0 W_{01} + V \leqslant V_c \leqslant \varepsilon_0 W_{02} + V$, 并且 $\varepsilon_0 W_{01} + V$ 和 $\varepsilon_0 W_{02} + V$ 为正定、径向无界的，那么由定理 1, 易得闭环系统几乎处处在 $[0, \infty)$ 上存在惟一解，并且为概率意义下有界.

如果 $\varphi_i(0) = 0 \, (i = 1, \cdots, n)$, 则 $\overline{H}(0) = 0, \overline{\varPhi}_i(0) = 0$ 和 $\overline{\alpha}_i(0) = 0$, 进而有 $c_3 = 0$ 和 $\mathcal{L}V_c \leqslant -c_1 V_c$. 因此，由定理 1 可知闭环系统全局渐近稳定.

注 3　如果采用观测器 (13), 那么在等式 (17) 右边将多出项 $2\tilde{x}_{[r+1,\,n]}^{\mathrm{T}} P\overline{f}(y)$. 对此项的处理首先要通过 Young's 不等式将 $\tilde{x}_{[r+1,\,n]}$ 和 $\overline{f}(y)$ 分离:

$$2\tilde{x}_{[r+1,\,n]}^{\mathrm{T}} P\overline{f}(y) \leqslant \varepsilon_3 \|\tilde{x}_{[r+1,\,n]}\|^2 + \frac{\|P\|^2}{\varepsilon_3}\|\overline{f}(y)\|^2, \quad \varepsilon_3 > 0,$$

其中 $\varepsilon_3\|\tilde{x}_{[r+1,\,n]}\|^2$ 可通过等式 (17) 右边负项控制, 而对 $\dfrac{\|P\|^2}{\varepsilon_3}\|\overline{f}(y)\|^2$, 虽然当 $r = 1$ 时, 具有因数 z_1^2, 从而可以通过虚拟控制 α_1 予以抵消 [10], 但当 $r > 1$ 时, 因 $\overline{f}(y)$ 无进一步的假设, 并且由积分反推思想知, 相对于虚拟控制 $\alpha_i(i = 1,\cdots,r-1)$, 可量测状态 $x_{i+1},\cdots,x_r$ 不可用, 所以 $\dfrac{\|P\|^2}{\varepsilon_3}\|\overline{f}(y)\|^2$ 不能由虚拟控制 $\alpha_i(i = 1,\cdots,r-1)$ 实现有效控制. 另外, 由于 $\dfrac{\|P\|^2}{\varepsilon_3}\|\overline{f}(y)\|^2$ 不以 $z_i(i = r,\cdots,n)$ 为因子, 所以也不能由虚拟控制 $\alpha_i(i = r,\cdots,n-1)$ 及实际控制 u 抵消. 因此, 难以实现对项 $2\tilde{x}_{[r+1,\,n]}^{\mathrm{T}} P\overline{f}(y)$ 的有效控制. 所以观测器 (13) 不适用于多输出 ($y = x_{[r]}$, $r > 1$) 系统.

注 4　由 (27) 和 (28) 式可知虚拟控制 $\alpha_i(i = 1,\cdots,n-1)$ 和实际控制 $u = \alpha_n$ 保持了在原点处的平衡性. c_3 刻画了闭环系统状态的静态特性. 由 (26) 式可以看出, 参数 κ_i 和 $\varepsilon_{2i}(i = 1,\cdots,n)$ 越小, 则 c_3 越小. 进一步, 由 (31) 式知, 如果要得到小的闭环系统状态静态上界, 可通过取小的参数 κ_i 和 $\varepsilon_{2i}(i = 1,\cdots,n)$ 实现. 然而, 由虚拟控制及实际控制的表达式易知, 参数 κ_i 和 $\varepsilon_{2i}(i = 1,\cdots,n)$ 越小, 控制能量将越大, 即要想得到小的闭环系统状态静态上界, 需要付出大的控制能量.

4　结论

本文研究了一类具有不可观测状态、未建模动态特性和随机干扰的单输入多输出随机非线性系统的输出反馈镇定问题. 给出了最小阶状态观测器和输出反馈镇定控制器的设计方法. 基于所设计的状态观测器, 给出了系统全部状态的估计, 分析了状态估计误差的收敛性. 结合积分反推方法, 构造性地给出了输出反馈镇定控制. 所设计的控制器可保证闭环系统概率意义下有界, 且当非线性及随机干扰在平衡点消逝时, 闭环系统为全局渐近稳定. 所引进的最小阶观测器既保留了全阶观测器具有的优点, 又避免了出现在观测误差动态方程中的额外非线性项, 而且适用于 SIMO 系统 (如 $y = (x_1,\,\cdots,\,x_r)^{\mathrm{T}}, r > 1$) 的控制设计问题. 需进一步研究的是: 当系统输出为 $y = Cx$, 其中 C 为 $r \times n$ 矩阵, 并且其任意一行、列只有一个元素为 1 其他皆为 0 时, 如何设计最小阶观测器, 构造严格反馈非线性系统的输出反馈镇定控制设计.

参　考　文　献

1 Deng H, Krstić M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44: 328～333
2 Deng H, Krstić M, Williams R. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46: 1237～1253
3 Florchinger P. Lyapunov-like techniques for stochastic stability. SIAM J Control and Optimization, 1995, 33: 1151～1169
4 Krstić M, Deng H. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London: Springer-Verlag, 1998
5 Liu Y G, Pan Z, Shi S J. Output feedback control design for strict feedback stochastic nonlinear systems under a risk-sensitive cost criterion. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Piscataway, FL. IEEE Control Systems Society, 2001, 1269～1274
6 Liu Y G, Zhang J F, Pan Z G. Design of satisfaction output feedback controls for stochastic nonlinear systems under quadratic tracking risk-sensitive index. Science in China, Ser F, 2003, 46(2): 126～144
7 Pan Z G, Basar T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion. SIAM J Control and Optimization, 1999, 37: 957～995
8 Pan Z G, Liu Y G, Shi S J. Output feedback stabilization for stochastic nonlinear systems in observer canonical form with stable zero-dynamics. Science in China, Ser F, 2001, 44(4): 292～308
9 Khas'minskii R Z. Stochastic Stability of Differential Equations. Rockville: S and N International Publishers, 1980
10 Jiang Z P. Global output feedback control with disturbance attenuation for minimum-phase nonlinear systems. Systems and Control Letters, 2000, 39: 155～164
11 Gihman R A, Skorohod A V. Stochastic Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1972
12 王恩平，秦化淑，王世林．线性控制系统理论引论．广州：广东科技出版社， 1991